第 40 卷　第 3 期
2023 年 6 月

应　用　力　学　学　报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 40 No. 3
Jun. 2023

文章编号:1000-4939(2023)03-0711-13

Taylor-Proudman 定理下的 Sullivan 涡解

陈国清

(民航厦门空管站,361004 厦门)

摘　要:本研究讨论(大气)湍涡的动力和结构。在 Taylor-Proudman 定理下,强涡量受扰能整轴刚移产生强涡动黏性,使黏性力参与平衡,地转可被分离时可形成 Sullivan 涡解。定理所需约束条件使涡解常仅存于高涡量区,在扰动中因护刚区现象而呈涡带。涡的实际结构与 2 个参数定量相关并受判据函数制约。某些湍流结构及电磁波由此可定性和定量解释。

关键词:涡扰刚动;涡动黏性;合浮强度;Sullivan 涡;护刚区;判据函数 $M(r,z)$

中图分类号:O357.5　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2023.03.024

Sullivan vortex solution by Taylor-Proudman theorem

CHEN Guoqing

(Xiamen Air Traffic Control Station of CAAC,361004 Xiamen,China)

Abstract: This work discusses the dynamics and structure of (atmospheric) turbulent vortices. Restricted by Taylor-Proudman theorem, the strong vorticity can be rigidly shifted in disturbance, thus possessing a strong vorticity viscosity to involve the viscous forces in the actual equilibrium; then Sullivan vortex solution can be formed if Geostrophic force can be separated. The constraint conditions required by the theorem make the vortex solution often exist only in high eddy regions, and appears as a vortex band due to the phenomenon of the rigid preserving area in the disturbance. The actual structure of vortex is quantitatively related to two parameters and restricted by the criterion function. Some structures in turbulence and electromagnetic wave can be explained qualitatively and quantitatively by it.

Key words: vortex disturbance moves rigidly; vortex viscosity; strength of floating and convergence; Sullivan vortex; rigid preserving area; criterion function $M(r,z)$

为寻找湍涡中广泛存在的结构和动力,本研究忽略胀量和熵的变化而仅关注涡量的影响,迴避湍流内在多尺度、不规则和外在多状态、多环境,绕开数学自洽但物理失真的 Reynolds 平均,而仅基于不可压湍流之 3 个动力特性:显著的旋转,明显而持续的扰动,以及涡黏系数 ν_t 与扰动速度 $\boldsymbol{V}$ 的尺度 U、空间一阶分布尺度 L 之间近乎刚性的 $\nu_t \propto UL$ 的联系。

因需同时考虑强涡量和准刚性,故从 Taylor-Proudman 定理着手。因黏性增强后地转可被忽略或分离,故绕过涡的定义而直引定常、轴对称的 Sullivan 涡解,然后定量和定性地分析此类由 Taylor-Proudman 定理导致的遍存于湍流中的特定现象。

收稿日期:2020-06-19　　修回日期:2021-03-10
通信作者:陈国清。E-mail:C5866646@126.com
引用格式:陈国清. Taylor-Proudman 定理下的 Sullivan 涡解[J]. 应用力学学报,2023,40(3):711-723.
CHEN Guoqing. Sullivan vortex solution by Taylor-Proudman theorem[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(3):711-723.

1 涡扰刚动、涡动黏性和判据 $\zeta \gg U/L$

对动力黏度 μ 匀布 $\nabla\mu=0$ 的不可压 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t=0$ 或 Stokes 流体(体积黏性系数 $2\mu/3+\mu'=0$,μ' 为膨胀黏性系数),从 Taylor-Proudman 定理可得 3 个结论。

1.1 涡扰刚动

建立固结旋体的随体坐标系使旋体涡量 $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{\Omega}$,$\boldsymbol{\Omega}$ 为角速度)成为牵连涡量,则旋体的扰速 V 所满足的 Navier-Stokes 方程取旋后,可得到扰动涡量 $\boldsymbol{\eta}\equiv\nabla\wedge V$ 的动力学方程为

$$\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial t}+(V\cdot\nabla)\boldsymbol{\eta}=\nabla\wedge\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\wedge\boldsymbol{r}\right)+[(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\eta})\cdot\nabla]V+\nabla\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho}\right)\wedge\boldsymbol{g}+\nabla\wedge[\nu_t\nabla^2(V+\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r})] \quad (1)$$

式中:∇为哈密顿算子;$\wedge$为叉乘;$\boldsymbol{r}$ 为从旋轴到扰动的矢径;$\boldsymbol{\omega}$ 为相对惯性系的旋体涡量;ρ 为扰动体的密度;ρ_0为其环境密度;$\boldsymbol{g}$ 为重力加速度;ν_t为运动黏性系数。

展开式(1)后可知,若其它项相比 $\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z$ 都为小量则有$\partial\boldsymbol{V}/\partial z\to0$,该扰速 $\boldsymbol{V}$ 是三维的,即横向(径向和周向)和轴向的扰动都将整轴刚移。称此现象为涡扰刚动。

尺度分析时,$\nabla\wedge(\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t\wedge\boldsymbol{r})$ 等价于$\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$,而$\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$主要由扰动产生时又等价于$\partial\boldsymbol{\eta}/\partial t$,故“其它项都为相对小量”的约束(绝对值)便同定理类似常为4条件:①准定常扰动$\partial\boldsymbol{\eta}/\partial t\to0$;②特征 Rossby 数 $R_0=U/(\zeta L)\ll1$,U 为 $\boldsymbol{V}$ 的尺度,ζ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 的尺度,L 为 $\boldsymbol{V}$ 的一阶尺度;③特征 Ekman 数 $E_\mathrm{k}=\nu_t/(\zeta L^2)\ll1$。其原始约束为$|\nabla\wedge[\nu_t\nabla^2(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r})]\ll\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z|$,故,$\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{r}$ 相当时扰速 $\boldsymbol{V}$ 反指周向易满足约束,而匀旋时约束为 $\nu_t\nabla^2\boldsymbol{\eta}\ll\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z$,此时因离心稳定和热扰动各向同性,若外部横向的动力有旋扰动足够缓慢,便可满足;④特征 Froude 数 $F_r=\zeta^2L/g_0\ll1$(g_0为 $\boldsymbol{g}$ 的尺度),或准匀质即$\nabla_h\rho\to0$ 常需 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 同向。由原始约束$\nabla[(\rho-\rho_0)/\rho]\wedge\boldsymbol{g}\ll\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z$ 易知,准饱和湿空气常需水平温差 0.1° K/km 并有$\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z\sim10^{-6}\mathrm{s}^{-2}$(如 $\delta z\sim10^3\mathrm{m}$ 且 $\boldsymbol{V}\sim10^0\mathrm{m/s}$ 时,$\boldsymbol{\omega}$ 仅有竖直分量 $\boldsymbol{\omega}_\perp$,且 $\boldsymbol{\omega}_\perp\geqq10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$)。

1.2 涡动黏性

$\nabla\mu=0$ 的不可压或 Stokes 流体刚移时偏应力张量 $\boldsymbol{\tau}_{ij}=C_{ijkl}\partial\boldsymbol{u}_k/\partial x_l$仅由$\partial\boldsymbol{u}_i/\partial x_i$产生,其单位黏性力为$\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}_{ij}=\nu_t\nabla^2\boldsymbol{V}=\nu_t\partial^2\boldsymbol{u}_i/\partial x_i^2$,脉压可略时,定常动量方程简为

$$\boldsymbol{u}_i\partial\boldsymbol{u}_i/\partial x_i=\nu_t\nabla^2\boldsymbol{V}=\nu_t\partial^2\boldsymbol{u}_i/\partial x_i^2 \quad (2)$$

尺度分析有 $\nu_t=UL$,此时 U 为对流速度的尺度,L 为 $\boldsymbol{V}$ 的二阶分布尺度。因$\partial\boldsymbol{V}/\partial z\to0$,空间二阶尺度 L 与 z 无关,常仅为旋体半径的函数,故把 $\nu_t=UL$ 改写(ν_t也改写为 v)为

$$v=UR \quad (\text{单位 } \mathrm{m^2s^{-1}} \text{即 } \mathrm{Pa\cdot s\cdot m^3/kg}) \quad (3)$$

该黏性 v 由涡量和扰动共同产生,故称它为涡动黏性 v。

如果没有扰动,涡动黏性不会激发;同时有快、慢扰动,涡量只对相应的慢扰动响应;如果扰动是横向的、动力的、有旋的,仅当涡量强到 $\zeta\gg U/L$ 时,涡动黏性才充分激发。

脉压不可忽略时,因任意方向都整轴刚移,故由扰速 $\boldsymbol{V}$ 产生的涡动黏性 v 在所有方向都相同,即仍遵守 Stokes 第 3 假设(流体各向同性且与坐标系的变换无关)。特取扰速 $\boldsymbol{V}$ 沿固结旋体的柱坐标系 r 向做一维运动,则应有约束:$\boldsymbol{V}_z=0$,$\boldsymbol{V}_\theta=0$,$\partial p/\partial z=0$ 而 $\boldsymbol{V}_r$为(r,θ)的函数。此时涡动黏性 v 写为,$v=r\boldsymbol{V}_rJ(\theta)$。因 p 是脉压,可建立与牵连运动无关的 2 个控制方程,三者联立可得 $J(\theta)$ 的解[4],可知旋体整轴刚移的阻力分布$\partial p/\partial r$ 与轴长有关,而 $\boldsymbol{V}$、R 和 v 都与轴长间接相关。

有牵连项和非定常项时,$v=UR$ 形式不变,但如同脉压时取 $\boldsymbol{V}_rJ(\theta)$ 那样,U 随之调整。

与湍流黏性 ν_t一样,涡动黏性 v 也是随流场变化的因变量。它与一方程模型相似,也与两方程模型契合。但 $v=UR$ 强调:只有满足定理以禀有刚性的那些相对旋体的脉动,才参与激发涡动黏性,而非湍动能的均方根速率或来流速度;其空间二阶分布尺度 R 也与湍涡长度或孔径不同,R 与零方程的混合长 l_m或泰勒涡长度更为相似,但 R 需有刚移约束。

1.3 扰动随旋体整轴刚动的一般判据:$\zeta\gg U/L$

特征 Ekman 数 $E_k=\nu_t/\zeta L^2$中的 L^2其实是一阶尺度 L 和二阶尺度 R 的乘积:$L\cdot R$,故若把 $\nu_t=v=UR$ 代入,可得,$E_k=\nu_t/(\zeta L^2)=U/\zeta L=R_0$,即此时约束③和约束②一致为

$$\zeta\gg U/L \quad (4)$$

下文常把它取为 $\zeta\geqslant10^2U/L$,这是因为其它项的总和相比 $\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z$ 也须为小量,且脉压等其它项

同存时，涡动黏性 v 的实际值应比 $v = UR$ 小。

显然扰速 $\boldsymbol{V}$ 越慢越易有 $\zeta \gg U/L$，但 $\boldsymbol{V}$ 很小时 $\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$ 的尺度将取为 $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$ 项，非匀速旋转时约束③便为，$\nabla \wedge [v \nabla^2 (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r})] \ll \boldsymbol{\omega} \partial \boldsymbol{V}/\partial z$，设扰动的轴向尺度为 H 作尺度比较有，$(UR/L)(\zeta r_0/LR) \ll \zeta U/H$，若 L 与 $\boldsymbol{r}$ 的尺度 r_0 相当，则有 $H \ll L$，此时仅薄层满足约束③；同样地 $\boldsymbol{\Omega}$ 或 $\boldsymbol{r}$ 很大使 $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$ 很大时亦需薄层扰动或旋体匀旋。

而相对旋体的扰动涡量 $\boldsymbol{\eta}$ 所满足的准定常约束为，$\partial \boldsymbol{\eta}/\partial t \ll \boldsymbol{\omega} \partial \boldsymbol{V}/\partial z$，尺度分析有，$(U/L)/(L/U) \ll \zeta U/H$，即 $(H/L)U/L \ll \zeta$，故若 $H \leqslant L$ 亦有 $\zeta \gg U/L$。因此除非 $H \geqslant 10^1 L$，匀质旋体（必不可压）匀旋时，其禀有扰动刚性、激发涡动黏性，常仅需考察 $\zeta \gg U/L$ 这一约束。

2 Sullivan 涡解及其可适用条件

黏性 ν_t 剧增为涡动黏性 v 后，黏性力 $v \nabla^2 \boldsymbol{V}$ 参与实际平衡将形成黏性涡解，而分层流中，涡扰刚动能使定常黏性涡解表现为 Sullivan 涡解，当然它还需要具体条件。

2.1 地转可忽略时轴对称黏性旋体的 Sullivan 涡解

取竖直 z 向为旋体轴向，旋体的吸入强度为 $a(a>0)$，重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 包含地球离心力（地球面的曲率项力仅考虑离心力），此时若竖直/轴向满足：$-\boldsymbol{g} - \rho^{-1}\partial p/\partial z = 4a^2 z (z \geqslant 0)$，则由其选择原点 o 的 z 向位置建立柱坐标系 (r, θ, z)。

如果地转偏向力 $-f\boldsymbol{V}$ 可略，黏性系数 v 和吸入强度 a 恒常，周向速度 $\boldsymbol{V}_\theta(r)$ 仅是 r 的函数且 $r \to 0$ 时有界，可设径向速度 $\boldsymbol{V}_r$ 和轴向速度 $\boldsymbol{V}_z$ 有待定解[2,4,7]，然后从轴向方程和连续性方程求出 $\boldsymbol{V}_z$、$\boldsymbol{V}_r$，再从周向方程求出 $\boldsymbol{V}_\theta$，得到定常 $\partial/\partial t = 0$、轴对称 $\partial/\partial\theta = 0$ 时的涡解，其轴速 $\boldsymbol{V}_z$、径速 $\boldsymbol{V}_r$、周速 $\boldsymbol{V}_\theta$、周向涡量 $\boldsymbol{\omega}_\theta$、轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$ 为

$$\boldsymbol{V}_z = 2az(1 - 3e^{-ar^2/2v}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{V}_r = -ar + 6vr^{-1}(1 - e^{-ar^2/2v}) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{V}_\theta = \boldsymbol{\omega}_0 r^{-1} \int \mathrm{d}r r \exp\left(\int \mathrm{d}r \boldsymbol{V}_r v^{-1}\right) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\theta = \partial \boldsymbol{V}_r/\partial z - \partial \boldsymbol{V}_z/\partial r = -6a^2 zrv^{-1} e^{-ar^2/2v} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\omega}_z = r^{-1}\partial(r\boldsymbol{V}_\theta)/\partial r = \boldsymbol{\omega}_0 \exp\left(\int \mathrm{d}r \boldsymbol{V}_r v^{-1}\right) \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_0$ 为 $r=0$ 处的轴向涡量。由 $\boldsymbol{V}_\theta(r)$、$-g - \rho^{-1}\partial p/\partial z = 4a^2 z$、周向方程、轴向方程、连续性方程在轴对称下所得定常解，因满足 $\boldsymbol{V}_z = 2azG(r)$ 的形式（净浮力 $-g - \rho^{-1}\partial p/\partial z = 4a^2 z$ 是比 $\boldsymbol{V}_z = 2azG(r)$ 更一般的约束）而称为 Sullivan 涡解。

这是在 $a > 0$ 且 $z \geqslant 0$ 时得到的，至于 $a < 0$ 和 $z < 0$ 时的解见 5.4 节。求解 Sullivan 涡时没用到径向方程故未给出 $p(r)$ 的解，径向可叠加 $\partial p/\partial r$ 但它影响 a 和 v。

2.2 所需约束条件的具体分析

定常旋体满足前述 5 条件便在 $\zeta \geqslant 10^2 U/L$ 的局部形成 Sullivan 涡解，无需全涡结构。轴对称时，涡扰刚动易使周速 $V_\theta(r, \theta, z)$ 仅为 $V_\theta(r)$，以下分析其它 4 个条件。

2.2.1 轴向满足约束：$-g - \rho^{-1}\partial p/\partial z = 4a^2 z$

无旋、无黏、无变形、绝热、不可压的单位质量气泡（或液滴），若其竖直速度 $\boldsymbol{w} \equiv \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 的加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{w}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}t^2$ 由单位净浮力 $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{g} - \rho^{-1}\partial p/\partial z$ 驱使，即

$$\mathrm{d}w/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F} = -g - \rho^{-1}\partial p/\partial z \approx -N^2 z \tag{10}$$

其中，$N^2 = g\partial \ln\theta_0/\partial z$，不可压时 $N^2 = -g\partial \ln\rho_0/\partial z$（$\theta_0$ 为静态环境位温，ρ_0 为静态环境密度），故，$4a^2 = -N^2$。设水平散度 $D(x,y) = \partial \boldsymbol{u}/\partial x + \partial v/\partial y = -2a$，若 $D(x,y,z)$ 沿 z 向缓变则 $\partial \boldsymbol{w}/\partial z = -D(x,y,z) \approx -D(x,y)$ 故 $\boldsymbol{w} = 2az + w_0$（积分常数 w_0），而由 $\boldsymbol{w} \equiv \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ 和 $4a^2 = -N^2$ 可知，形式为 $\boldsymbol{w} = 2az + w_0$ 的解必满足 $\boldsymbol{F} = 4a^2 z = -N^2 z$ 驱使的 $\mathrm{d}\boldsymbol{w}/\mathrm{d}t = -N^2 z$，即缓变的辐合辐散必为净浮力 $\boldsymbol{F}$ 的一个组分，故下文改称吸入强度 a 为合浮强度，它满足

$$4a^2 = D^2 - N^2 \tag{11}$$

在 $N^2 > 0$ 与 $N^2 < 0$ 的界面，可同时存在向 $N^2 < 0$ 层上升和向 $N^2 > 0$ 层下拉。

2.2.2 地转可分离或可忽略

因径向与解无关，北半球某纬度处地转分量 $f = 2\boldsymbol{\Omega}\sin\varphi$ 仅影响周向解。此时若把 $\partial/\partial t = 0$、$\partial/\partial\theta = 0$、$\boldsymbol{V}_\theta(r)$ 和 $\boldsymbol{\omega}_z = r^{-1}\partial(r\boldsymbol{V}_\theta)/\partial r = \partial \boldsymbol{V}_\theta/\partial r + \boldsymbol{V}_\theta/r$ 代入原始控制方程组的周向方程可得

$$(\boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{f})\boldsymbol{V}_r = v\partial \boldsymbol{\omega}_z/\partial r \tag{12}$$

显然 $\boldsymbol{\omega}_z \gg \boldsymbol{f}$ 时仍为式(7)的解。而 $\boldsymbol{\omega}_z \leqslant \boldsymbol{f}$ 时若 $\partial \boldsymbol{\omega}_z/\partial r \gg \partial \boldsymbol{f}/\partial r$ 则 $\boldsymbol{V}_r/v \approx \partial \ln(\boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{f})/\partial r$，此时 $\boldsymbol{V}_\theta$ 约为 Sullivan 涡与地转涡之和，中小尺度常有 $\partial \boldsymbol{\omega}_z/\partial r \gg \partial \boldsymbol{f}/\partial r \sim 2 \times 10^{-11} \mathrm{s}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$。

地转另一分量 $\boldsymbol{f}' = 2\boldsymbol{\Omega}\cos\varphi$ 产生竖直振荡和东

西漂移的无旋科氏力项。因 $\boldsymbol{F}=4a^2z\sim 2a\boldsymbol{w}$ 而 $\boldsymbol{V}_z$ 包含了 $\boldsymbol{w}$，即 $\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$ 中包含 $\partial\boldsymbol{F}/\partial z$，故若该科氏力项的梯度显小于相关项，如

$$|\partial(\boldsymbol{f}'\boldsymbol{V})/\partial z \leqslant 10^{-1}\partial\boldsymbol{F}/\partial z| \tag{13}$$

因对 $\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$（即 a）影响小，就在含有 $\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$（或 a）的控制方程中略去，即使 $|\boldsymbol{f}'\boldsymbol{V}\geqslant\boldsymbol{F}|$，即把径向牵连涡量产生的无旋振荡漂移仅作为扰动存在。地球面曲率项竖直分量常略。

2.2.3 恒常的合浮强度 a 和涡动黏性 v

因 Sullivan 涡解都有 $\mathrm{e}^{-ar^2/2v}$ 形式，故幂、三角和对数函数（常为扩散\波动）形式的 $a(r,z)$ 和 $v(r,z)$ 在定常、轴对称时可近似缓变，但要考虑轴向扰动和地转的影响。

轴向扰动不影响涡扰刚动和涡动黏性 v 但能改变合浮强度 $a(r,z)$ 的分布，需改变量为幂\三角\对数函数或为小于原值一个量级的相对小量。此外，轴向扰动 $\boldsymbol{V}'_z$ 使轴向总速度变为 $\Sigma\boldsymbol{V}_z=\boldsymbol{V}_z+\Sigma\boldsymbol{V}'_z$ 故可直接改变 Sullivan 涡，但涡扰刚动总使 $\partial\Sigma V'_z/\partial z\to 0$，故二阶项不受影响，由于控制方程中涉及到 $\Sigma\boldsymbol{V}'_z$ 的仅为 $\boldsymbol{V}_z\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$ 中的两个 $\boldsymbol{V}_z$，故若 $\Sigma\boldsymbol{V}'_z$ 满足下列两种情形之一时仍维持 Sullivan 涡，即

① $\boldsymbol{V}_z+\Sigma\boldsymbol{V}'_z\approx\boldsymbol{V}_z=2az(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v})$

即：
$$|\Sigma\boldsymbol{V}'_z \ll 2az(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v})| \tag{14}$$

②
$$|(\Sigma\boldsymbol{V}'_z)\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z \ll \boldsymbol{F}=4a^2z|$$

即：
$$|\Sigma\boldsymbol{V}'_z\times 2a(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v})\ll 4a^2z| \tag{15}$$

当 $a>0$ 时，$1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v}\leqslant 1$，故取宽松约束(15)，即，

$$|\Sigma\boldsymbol{V}'_z \ll 2az/(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v})| \tag{16}$$

故，在 $1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v}\to 0$ 即 $r\approx 1.482\sqrt{v/a}$ 处附近，允许无限大的轴向扰动；在 $1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v}\approx 0.82$ 的 $r=2.375\sqrt{v/a}$ 处，允许的轴向扰动 $\Sigma\boldsymbol{V}'_z\ll 2az/0.82\approx 2az\times 1.22$；在 $1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v}\to 1$ 即远场 ∞ 处，允许的轴向扰动需小于 $2az$ 一个量级。因此，轴向扰动可使 Sullivan 涡常只局部存在。

而地转分量 $f'=2\boldsymbol{\Omega}\cos\varphi$ 产生的轴向振荡和东西漂移都含 $\mathrm{e}^{-ar^2/2v}$，故需 a 小于原值一个量级以上才缓变。又因 $\partial\boldsymbol{F}/\partial z=4a^2$，故轴向振荡时还需小两个量级，即需，

$$|\partial(f'\boldsymbol{V})/\partial z=\partial[2\boldsymbol{\Omega}\cos\varphi(\boldsymbol{V}_r\cos\theta+\boldsymbol{V}_\theta\sin\theta)]/\partial z\leqslant 10^{-2}\partial\boldsymbol{F}/\partial z| \tag{17}$$

它比式(13)苛刻。易知式(17)常为 $\partial\cos\varphi/\partial z\leqslant 10^1a^2$ 亦即 $\tan\varphi\sin\varphi\leqslant 10^1a^2r_\varphi$，其中 r_φ 为纬角 φ 处的地球半径，故 a 稍大于 $10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ 量级，而 $a=10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ 时轴向振荡常只在中低纬，在 $\varphi\sim 5°$ 附近轴向振荡允许的 $a\to 1.0\times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$。至于东西（$x$ 轴）漂移则需

$$|\partial(f'\boldsymbol{V}_z)/\partial x=\partial(2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{V}_z\cos\varphi)/\partial z\leqq 10^{-1}\partial(f\boldsymbol{V}_\theta)/\partial x| \tag{18}$$

易知其对 a 常仅为微调，但若 $\varphi\leqq 6°$ 因 $\tan\varphi\leqslant 0.1$，较高 z 时便难满足。

2.2.4 轴对称 $\partial/\partial\theta\to 0$（即 $\partial\boldsymbol{V}/\partial\theta\to 0$ 和 $\partial P/\partial\theta\to 0$）

如果 Sullivan 涡闭合则周向循环反复易 $\partial/\partial\theta\to 0$，若涡仅存于局部则易沿相对均匀的流向或等压线分布。因求解 Sullivan 涡时没用到径向方程，故 $\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial\theta\to 0$ 时若还满足后文 5.4.3 节的情形，则也有 $\partial/\partial\theta\to 0$。

此外，定理所需的匀质、匀旋和不可压约束，要求分层流中 $\partial\boldsymbol{V}/\partial\theta$ 的 3 个分量（绝对值）必须都为相对小量，即，①在分层流中，定理的匀质约束常需涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 由竖直涡量 $\boldsymbol{\omega}_\perp$ 主导以使 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 趋于同向，致使径向涡量，$\boldsymbol{\omega}_r=r^{-1}\partial\boldsymbol{V}_z/\partial\theta-\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial z$ 需为轴向涡量，$\boldsymbol{\omega}_z=r^{-1}(\partial(r\boldsymbol{V}_\theta)/\partial r-\partial\boldsymbol{V}_r/\partial\theta)$ 的相对小量，当涡扰刚动使 $\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial z\to 0$ 时，便需 $\partial\boldsymbol{V}_z/\partial\theta$ 为相对小量；②相邻径速 $\boldsymbol{V}_r$ 同向时，值 $\partial\boldsymbol{V}_r/\partial\theta$ 易显小于 $\boldsymbol{V}_r$，相比于 $\partial(r\boldsymbol{V}_\theta)/\partial r=r\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial r+\boldsymbol{V}_\theta$ 它常可为相对小量；周向和径向的扰动较为缓慢时，牵连速度 $\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{r}$ 易显大于扰速 $\boldsymbol{V}$，旋体所需局部匀旋的 $\nabla\boldsymbol{\omega}\to 0$ 约束，便要求局地涡量 $\partial\boldsymbol{V}_r/\partial\theta$ 是个相对小量；③离心稳定可使径向扰速较小，整轴刚移能使扰速沿轴向均匀，因此略强的不均匀扰速将仅在 θ 向变化，但若仅有 $\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial\theta$ 则 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}$ 将使 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t\neq 0$，故 $\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial\theta$ 亦需小量。

可见，能对涡扰作刚动的分层流旋体，既常先为轴对称流动也常维持轴对称流动。同时满足 $\partial/\partial\theta\to 0$ 和合浮力 $\boldsymbol{F}=4a^2z$ 的定常黏性涡，便是 Sullivan 涡。故综上所述，旋体涡扰刚动（主要是满足 $\zeta\gg U/L$）时，易在湍流扰动中形成有界的 Sullivan 涡。

2.3 形成 Sullivan 涡常需 $\boldsymbol{\omega}_z\geqslant 10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$，大气中常还需 $a\sim 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ 量级

在 $\zeta\gg U/L$ 和 $v=UR$ 下，若扰速与涡速的 R 和 L 同分布，则约束 $|v\nabla^2\boldsymbol{V}\geqslant -f\boldsymbol{V}|$ 常等价于 $|\zeta\gg f|$，故 Sullivan 涡常是强涡量旋体 $\boldsymbol{\omega}_z\geqslant 10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$ 的普遍形态。扰速缓慢使 $v=UR$ 太小，或流场均匀 $\nabla^2\boldsymbol{V}$ 过小时，黏性力 $v\nabla^2\boldsymbol{V}$ 太小便为地转涡，但湍流应可不考虑这 2 种情形。

如果强黏性 v 唯一来自涡扰刚动，则涡速解中应隐含扰速的有旋部分，匀质时便需其远小于涡速（常即 $|\zeta \gg \eta|$），以使控制方程组与其来源即动量定理一致。

实现 $\zeta \gg U/L$ 的主要途径为增大 ζ 即轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$，因涡量并合时需满足匀旋和匀质约束，故常在低层生成涡量、在准中性中层并合涡量。大气中应取 $a \sim 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ 量级（易整轴一致升、降，但若已并合了强涡量则 a 不再受限）以满足匀旋和不可压，此时流动也易失稳并允许地转振荡，此时非弹性近似就是 Boussinesq 近似。

3　Sullivan 涡的结构（不涉及 $\partial p/\partial r$）

取 $r = x\sqrt{v/a}$ 代入式（9）易知 $\boldsymbol{\omega}_z$ 与缓变的 a、v 无直接相关，故取 $r = x\sqrt{v/a}$ 再由式（5）～（9）（z 单位量级随 r 调整）绘出 Sullivan 涡的速度、涡量和流线（绘时取 $a = 1, v = 1, z = 0.5$）。

图 1 物理量（颜色，单位）：$\boldsymbol{V}_z$（黑，$2az$）、$\boldsymbol{V}_r$（蓝，$\sqrt{av}$）、$\boldsymbol{V}_\theta$（绿实，$\boldsymbol{V}_0$）、$\boldsymbol{\omega}_\theta$（橙，$z\sqrt{a^3/v}$）、$\boldsymbol{\omega}_z$（红，$\boldsymbol{\omega}_0$）

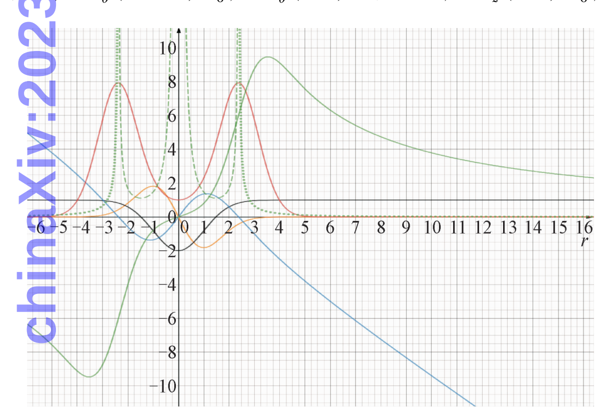


图 1　Sullivan 涡的物理量（纵轴）随向径 r 的分布

Fig. 1　The distribution of physical quantity (longitudinal axis) in Sullivan vortex along radial r

3.1　Sullivan 涡三个分速度：$\boldsymbol{V}_z$（黑）、$\boldsymbol{V}_r$（蓝）、$\boldsymbol{V}_\theta$（绿实线）的随 r 分布

图 1 显示涡中心下沉，到 $r = 1.482\sqrt{v/a}$ 转为上升，当 $r \to 3.0\sqrt{v/a}$ 轴向升速→极值 $2az$。在 $1.482\sqrt{v/a} \leqslant r \leqslant 2.61\sqrt{v/a}$ 附近，轴速 $\boldsymbol{V}_z$（黑线）上升且有明显的径向梯度 $\partial \boldsymbol{V}_z/\partial r$，此处为 Sullivan 涡的升变环。

径速 $\boldsymbol{V}_r$（蓝）沿径向先流出、再流入。在升变环中，$2.61\sqrt{v/a} \geqslant r \geqslant 2.375\sqrt{v/a}$ 之间 $\boldsymbol{V}_r < 0$，为径向流入；$2.375\sqrt{v/a} \geqslant r \geqslant 1.482\sqrt{v/a}$ 之间 $\boldsymbol{V}_r > 0$，为径向流出。

周速 $\boldsymbol{V}_\theta$（绿实）沿径向先增加、再下降，最大值在 $r = 3.532\sqrt{v/a}$ 处。从约束（16）知，径向远端允许的轴向扰速 $\boldsymbol{V}_z{}'$ 需小于 $2az$ 一个量级，而 $r \to 3.0\sqrt{v/a}$ 时 $\boldsymbol{V}_z$ 已趋于 $2az$，故当 $\boldsymbol{V}_z$ 自身成为扰动时，Sullivan 涡将终止于此，此时周速最大值处即为涡的边缘。

3.2　轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$（红线）、流函数 Ψ（$\mathrm{m^3 s^{-1}}$）和周向涡量 $\boldsymbol{\omega}_\theta$（橙线）

图 1 显示轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$ 先沿向径 r 增加，到 $r = 2.375\sqrt{v/a}$ 处达到一个确定的最大值，即

$$\boldsymbol{\omega}_z \to 7.934\boldsymbol{\omega}_0，在\ r = 2.375\sqrt{v/a}\ 处 \qquad (19)$$

最大值与 a、v 都无关。随后 $\boldsymbol{\omega}_z$ 快速衰减，整个升变环内 $\boldsymbol{\omega}_z$ 都显大于中心涡量 $\boldsymbol{\omega}_0$，而受 $\zeta \geqslant 10^2 U/L$ 约束，临界 $\boldsymbol{\omega}_0$ 值（由实形决定）时，便只在 $r = 2.375\sqrt{v/a}$ 附近维持一高涡量环。若 a 越小则高涡量环的半径 r 越大；若 a 随 $r(x, y)$ 分布，高涡量环的涡结构将随之多变；若涡量得以保障，可因 a 值不同形成层叠结构，形似径向波动。

两条流线 Ψ（$r\boldsymbol{V}_z = \partial \Psi/\partial r$、$r\boldsymbol{V}_r = -\partial \Psi/\partial z$）为，$\Psi$（$\mathrm{m^3 s^{-1}}$）$= 2$（绿珠线）、$\Psi = -2$（绿虚线），可见 Sullivan 涡呈内部散沉、外侧聚升的桶状结构。

通常合浮强度 $a \sim 3.0$ 时 $\boldsymbol{\omega}_\theta$ 就与 $\boldsymbol{\omega}_z$ 相当（取 $a \times 10^{-4}s^{-1}$，$v \times 10^4 \mathrm{m^2 s^{-1}}$ 时 r 和 $z \times 10^4 \mathrm{m}$），但由定义 $\boldsymbol{\omega}_\theta = \partial \boldsymbol{V}_r/\partial z - \partial \boldsymbol{V}_z/\partial r$ 知因总有 $\partial \boldsymbol{V}_r/\partial z = 0$ 使 $\boldsymbol{\omega}_\theta$ 仅是反映切变的计算量、无实际曲率，而速度分解时无曲率半径不应含于 $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$ 项中，故不产生牵连加速度 $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{V}$ 项，对 $\boldsymbol{\omega}\partial \boldsymbol{V}/\partial z$ 无贡献，故考察定理约束时，若把 Sullivan 涡当做牵连涡，则仅需关注轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$。

4　扰动使 Sullivan 涡挤压变形时的约束和判据函数 $M(r, z)$

切变中 Sullivan 涡易整轴刚移而受挤，但其物理量不均匀，故定理约束条件 $\zeta \gg U/L$ 临界成立时，将只在局域满足约束而呈局部结构，需找出这些位置。

4.1 受挤压时 Sullivan 涡内部变化的约束公式及其随 r 变化的图解

挤压增强时$\partial/\partial r\to 0$、$\partial/\partial z\to 0$ 处仍有 $\zeta\gg U/L$，而$\nabla^2\boldsymbol{\omega}\to 0$ 处仍满足“$v\ \nabla^2\boldsymbol{\eta}$ 为相对小量”，故临界约束时，$\nabla^2\boldsymbol{\omega}$、$\partial/\partial r$、$\partial/\partial z$ 都较小或缓变处仍维持 Sullivan 涡。

注意到 $\boldsymbol{\omega}_r=0$、$\partial/\partial\theta=0$ 和$\partial^2/\partial z^2=0$，代入式(8)和式(9)，可得$\nabla^2\boldsymbol{\omega}$ 的两个分量，即

$$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_\theta-r^{-2}\boldsymbol{\omega}_\theta=24a^3rv^{-2}z\mathrm{e}^{-ar^2/2v}-6a^4r^3v^{-3}z\mathrm{e}^{-a^2/2v}\tag{20}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_z=\boldsymbol{\omega}_0[ar^2v^{-2}-14av^{-1}+18av^{-1}\mathrm{e}^{-ar^2/2v}+36r^{-2}(1-\mathrm{e}^{-ar^2/2v})^2]\exp\left(\int\mathrm{d}r\boldsymbol{V}_rv^{-1}\right)\tag{21}$$

展开$\partial\boldsymbol{V}_z/\partial r$、$\partial\boldsymbol{V}_r/\partial r$、$\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial r$ 和$\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$ 为

$$\partial\boldsymbol{V}_z/\partial r=6a^2zrv^{-1}\mathrm{e}^{-ar^2/2v}\tag{22}$$

$$\partial\boldsymbol{V}_r/\partial r=6(a+r^{-2}v)\mathrm{e}^{-av^2/2v}-a-6vr^{-2}\tag{23}$$

$$\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial r=\boldsymbol{\omega}_0\exp\left(\int\mathrm{d}r\boldsymbol{V}_rv^{-1}\right)-\boldsymbol{\omega}_0r^{-2}\int\mathrm{d}rr\exp\left(\int\mathrm{d}r\boldsymbol{V}_rv^{-1}\right)\tag{24}$$

$$\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z=2a(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v})\tag{25}$$

定量取 $a=1.0\times10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$，$v=1.0\times10^4\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$绘出式(20)～(25) 6 条曲线，绘图时取 $z=0.5$，$a=1.0$，$v=1.0$，$\boldsymbol{\omega}_0$缺省，$\boldsymbol{V}_r$取式(6)并附表 1 对应关系，再添加轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$随 r 分布。

表 1 图 2 的线条颜色与相应变量、公式编号的对应关系

Tab. 1 Correspondence between line colors in Fig. 2 and corresponding variables, formula numbers

红实	绿虚	紫虚	蓝珠	黑珠	橙珠	红珠
$\boldsymbol{\omega}_z$	$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_\theta-\boldsymbol{\omega}_\theta/r^2$	$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_z$	$\partial\boldsymbol{V}_z/\partial r$	$\partial\boldsymbol{V}_r/\partial r$	$\partial\boldsymbol{V}_\theta/\partial r$	$\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$
9	20	21	22	23	24	25

图 2 中另添的 2 条线见下文。据图 2，在高 $\boldsymbol{\omega}_z$区，蓝珠线小值、缓变，红珠和黑珠线虽非小值但缓变，而橙珠线虽较大亦非缓变但总随红实 $\boldsymbol{\omega}_z$而变、使 $\boldsymbol{\omega}$ 和 U 同变故 $\zeta\gg U/L$ 缓变。所有珠线都满足约束 $\zeta\gg U/L$ 缓变而绿虚$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_\theta-\boldsymbol{\omega}_\theta/r^2$ 常较小，使紫虚$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_z$和红实 $\boldsymbol{\omega}_z$ 常是临界挤压时的主参考量。它表明轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$的大小和分布常是决定 Sullivan 涡实际形态的主因。紫虚$\nabla^2\boldsymbol{\omega}_z=0$ 内位在 $r=1.789$ 处对应 $\boldsymbol{\omega}_z=6.054\boldsymbol{\omega}_0$，临界扰动时 Sullivan 涡常终止于此。

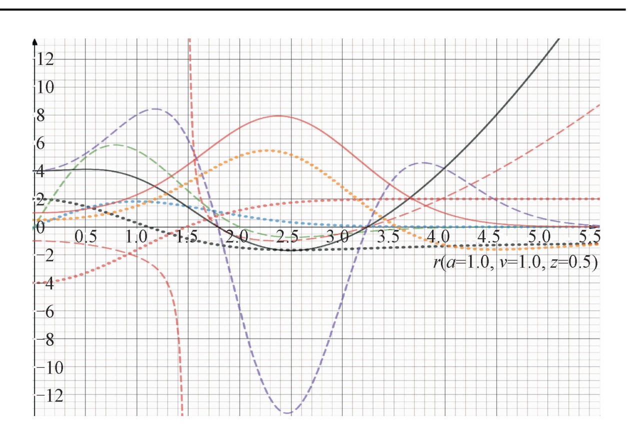


图 2 受扰时 Sullivan 涡的内部变化

Fig. 2 The internal variation of Sullivan vortex during disturbance

4.2 挤压扰动时判据函数 $M(r)$ 的 2 种形式

挤压时牵连涡量为轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$，而周向涡量携带的轴向扰动与 $\boldsymbol{\omega}_z$平行、不影响 $\zeta\gg U/L$，由式(16)知也不改变 Sullivan 涡，故扰动涡量 $\boldsymbol{\eta}$ 不大于 $\boldsymbol{\omega}_z$，因此“$v\ \nabla^2\boldsymbol{\eta}$ 相比 $\boldsymbol{\omega}\partial\boldsymbol{V}/\partial z$ 为相对小量”的约束此时(匀旋)为，$v\ \nabla^2\boldsymbol{\omega}_z\ll\boldsymbol{\omega}_z\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z$，若展为判据函数 $M(r)$，扰速 $\boldsymbol{V}$ 的垂切$\partial\boldsymbol{V}/\partial z$ 较小时，使$|\partial\boldsymbol{V}/\partial z\leqslant\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z|$，则$M(r)$为

$$M(r)=\frac{v\ \nabla^2\boldsymbol{\omega}_z}{\boldsymbol{\omega}_z\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z}=\frac{v}{2a(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v})}\left[-\frac{14a}{v}+\frac{ar^2}{v^2}+\frac{18a}{v}\mathrm{e}^{-ar^2/2v}+\frac{36}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-ar^2/2v})^2\right]\tag{26}$$

图 2 的红虚线($v=1$，$a=1$)即为 $M(r)$。其中在 $1.7\leqslant r\leqslant 3.6$ 间的高 $\boldsymbol{\omega}_z$区，$|M(r)|\leqslant 1$。因 a 和 v 都可随 z 而变，因此 $M(r)$ 实质上也是 z 的函数，即 $M(r)$ 为 $M(r,z)$。

若$|\partial\boldsymbol{V}/\partial z>\partial\boldsymbol{V}_z/\partial z|$，因扰动相对缓慢其尺度$\partial\boldsymbol{V}/\partial z$常可取为恒值(但涡黏性 v 可随流场而变)，此时 $M(r)$ 可简写为

$$M(r)=\frac{v\ \nabla^2\boldsymbol{\omega}_z}{\boldsymbol{\omega}_z\partial\boldsymbol{V}/\partial z}\sim v\left[-\frac{14a}{v}+\frac{ar^2}{v^2}+\frac{18a}{v}\mathrm{e}^{-ar^2/2v}+\frac{36}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-ar^2/2v})^2\right]\tag{27}$$

此时的 $M(r)$ 可参见图 4 的 3 条紫线，或图 5 右图的 4 条虚线和图 8。数值分析可知，$|M(r)|\leqslant 1$ 时上述 2 种情形的 $M(r)$ 即 $M(r,z)$ 相似。

图 2 黑实线是按式(27)取 $v=1.0\times10^4\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$的情形。大气中$\partial\boldsymbol{V}/\partial z$ 常达 $10^0\mathrm{m\cdot s^{-1}\cdot km^{-1}}$即 $10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$

量级，显大于$\partial V_z/\partial z = 2a(1-3)e^{-ar^2/2v}$)的 $a=1.0$ ($\times 10^{-4}\ s^{-1}$)量级，故红实线高 $\boldsymbol{\omega}_z$ 区与黑实线 $|M(r)|\leqslant 1$ 之间的重叠区，便为挤压下 Sullivan 涡残域，它易在 $r=1.789$ 和 $r=3.243$ 的两个 $M(r)=0$ 附近呈双窄带。该 $M(r)=0$ 位置是特取 $a=1.0$ 得到的，数值分析可知，仅在 $a>0.6$ 时方可取 r 的单位为 $\sqrt{v/a}$。考虑约束式(16)，笼统可取大气 Sullivan 涡界为 $3.0\sqrt{v/a}\geqslant r\geqslant 1.7\sqrt{v/a}$。

4.3　护刚区

扰动增强或减弱时，旋体局域能保有刚性仍维持 Sullivan 涡，称此处为刚性保护区，简称护刚区。一般关注扰动渐强(且 $\boldsymbol{\omega}_\theta$ 可忽略)的情形，此时它常位于 $\boldsymbol{\omega}_z\geqslant 6\boldsymbol{\omega}_0$ 区域。

扰动(有旋)增强后，径向多数位置将难满足 $\zeta\geqslant 10^2 U/L$，分层流层结 $N\sim 2a$ 随之调整，而 $\boldsymbol{a}$ 将改变极值 $\boldsymbol{\omega}_z\to 7.934\boldsymbol{\omega}_0$ 的径向位置，使 $\boldsymbol{\omega}_z$ 径向传播(常垂直流向并呈急流核)。

涡扰临界刚动时护刚区主要与 $\boldsymbol{\omega}_z$ 的大小和分布有关，而轴对称时 $\boldsymbol{\omega}_z$ 的定常值仅由轴向方程即 N 和 D 确定，故从 Sullivan 涡解得到的护刚区形态有普遍性。

5　实态的 Sullivan 涡及其理论解释

下面讨论旋体剖面 $a(z)$ 和平展 $a(x,y)$ 的几个简单结构以及 $a<0$ 和 $z<0$ 的解，并比对大气超单、飓风，尖形 Λ 涡\条带、绕流"猫眼"和龙卷等形态，定量或定性地予以解释。

5.1　大气一个 Vortex 超单的剖面 $\partial a/\partial z>0$

考虑一种简单情形，合浮强度 a 仅轴向缓变，取对流顶为 12 km 及适当量级使其为

$$a=\sqrt{25/(12-z)}\times 10^{-4}\ s^{-1} \tag{28}$$

因涡扰刚动使扰速 U 轴向均匀，而自中心均匀外扩使 $U\propto 1/r$，故取涡动黏性 v 为

$$v=Ur=1.0\times 10^4\ m^2 s^{-1} \tag{29}$$

然后绘出式(28)和式(29)下的等轴速 $\boldsymbol{V}_z=2az(1-3e^{-ar^2/2v})$ 线。

绘图时，因 a 的单位为 $10^{-4}\ s^{-1}$，r 的单位 $\sqrt{v/a}\sim 10^4$ m，故取 v、a 和 r 的单位都为 1，也取纵坐标 z 单位 10^3 m 为 1，并嵌入一个 Vortex 试验的超单[8]的反射率因子剖面。

图 3 绿珠线为 a(横轴)随 z 的分布；黑虚线为径向速度 $\boldsymbol{V}_r=0$，位于 $r=2.375\sqrt{v/a}$ 处；黑实线为轴速 $\boldsymbol{V}_z=0$，位于 $r=1.482\sqrt{v/a}$ 处；紫虚线为 $\partial\boldsymbol{V}_r/\partial r=0$ 线，位于 $r=1.11\sqrt{v/a}$ 处。等 $\boldsymbol{V}_z$($\times 10^{-1}$ m/s)线为 5 条实线：$\boldsymbol{V}_z=5.0$(红)，1.0(橙)，0(黑)，-0.5(绿)，-2.5(蓝)。

由图 3 可见，蓝线的弧度与强回波形态吻合良好，其左侧的次强回波边缘恰位于紫虚线所示 $r=1.11\sqrt{v/a}$ 的 $\partial\boldsymbol{V}_r/\partial r=0$ 处；强回波都位于两条黑线附近，分别对应 $\boldsymbol{V}_z$ 异向和 $\boldsymbol{V}_r$ 异向；黑实线左侧为下沉区，其紧邻左侧的近地面回波最强；两黑线间为上升区，该区 $\boldsymbol{V}_z$ 随 $\boldsymbol{V}_r$ 径向流出而增速，近地面径宽略小于 $2.375-1.482=0.893\sqrt{v/a}\approx 7.43$ km，回波呈穹隆状 BWER；紧邻黑虚线内侧左下方，$\boldsymbol{V}_z$ 较大并随 $\boldsymbol{V}_r$ 径向流出而增速，有少量强回波，而其右侧的 $\boldsymbol{V}_z$ 随 $\boldsymbol{V}_r$ 的径向流入有所减弱，回波较强、范围较大，呈悬挂状。

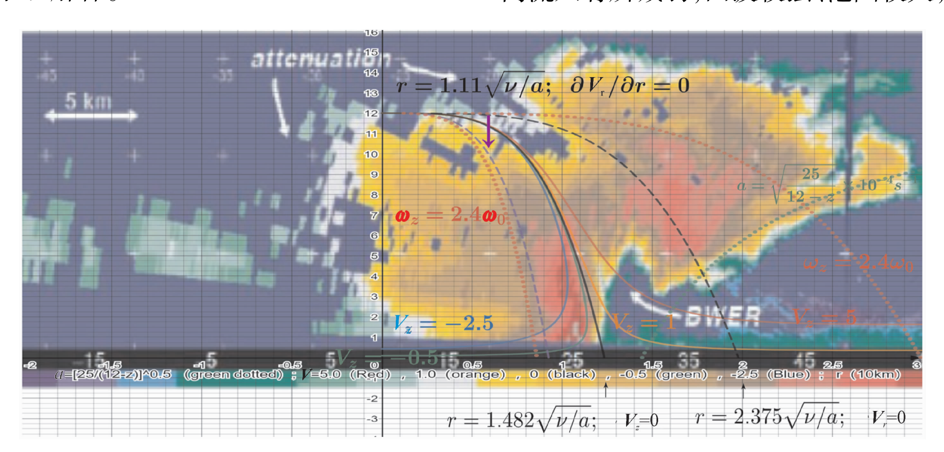


图 3　用 Sullivan 涡结构分析一个实测超单

Fig. 3　Analysis of a measured supercell with Sullivan vortex structure

悬挂回波的径向外边缘紧贴绿珠线的 a 随 z 分布线，下垂尖端沿其指向形成尖状，这是因为 Sullivan 涡与环境场升速一致趋于 $2az$，故平移时升速断面来自 a 随 z 的分布。

旋转中心位于图 3 的 z 轴，2 条红珠线为轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z=2.4$（单位 $\boldsymbol{\omega}_0$），其沿线两侧的色调变化较一致。在 $\zeta \gg U/L$ 约束下，近中心区不是 Sullivan 涡，单体孤存于局域。图中所有强回波都在 3 条珠线内，这是 Sullivan 涡的轮廓，也可能就是边界。

5.2　Allen 飓风的剖面结构比对分析（$\partial a/\partial z<0$）

比对分析时（文献[8]文献[9]Jorgensen1984 合成分析）需用到下列 4 个定量关系，

①当 $r \to 0$ 处不满足 $\zeta \geqslant 10^2 U/L$ 时，由流函数 $\boldsymbol{\Psi}$（$\mathrm{m^3 s^{-1}}$）的表达式取 $\boldsymbol{V}_r=0$ 的 $\boldsymbol{\Psi}=0$ 位置起始积分（消除变形影响）。由飓风实图（图 4）取该位置 $r_0=(3+z/5.5)\times 10^4$ m，即特有，

$$\boldsymbol{\Psi}=\int r\boldsymbol{V}_z \mathrm{d}r=\int z\frac{\partial(r\boldsymbol{V}_z)}{\partial z}\mathrm{d}r=-z\int\frac{\partial(r\boldsymbol{V}_r)}{\partial r}\mathrm{d}r$$
$$=-zr\boldsymbol{V}_r=\int_{3+z/5.5}^{r} r2az\left(1-3\mathrm{e}^{-ar^2/2v}\right)\mathrm{d}r \qquad (30)$$

②此时判据 $\zeta \geqslant 10^2 U/L$ 中的 L 为径向距离，由飓风实测（图 4）和轴向刚移有：$L=r+z/5.5$，故涡动黏性 $v=UR=Ur$ 时取临界涡量值 $\boldsymbol{\omega}_s$ 的判据为

$$\boldsymbol{\omega}_s \geqslant 10^2 U/L=100v/[r(r+z/5.5)] \qquad (31)$$

③因顶底环境相似而径向流动始终存在，故取下沉区对流顶为 12 km、上升区对流顶为 14 km，给出上升区合浮强度 a_U 和下沉区合浮强度 a_D 的表达式

$$a_U=\sqrt{(14-z)/25}\times 10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}},\qquad (32)$$
$$a_D=\sqrt{(12-z)/25}\times 10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$$

④由飓风实图和 $v(r,z)=UR$ 给出上升区和下沉区相应的涡动黏性 v 表达式，即

$$\nu_U(r,z)=(2.5-0.4r+z/7)\times 10^4\ \mathrm{m^2s^{-1}},$$
$$\nu_D(r,z)=(2.8-0.4r+z/7)\times 10^4\ \mathrm{m^2s^{-1}} \qquad (33)$$

依此定量关系分区绘出流线，并嵌入飓风实图再添加 Sullivan 涡特征解值，在图 4 中绿虚线为下沉区（取 a_D 和 v_D）的流线：$\boldsymbol{\Psi}=10$（上），$\boldsymbol{\Psi}=5$，$\boldsymbol{\Psi}=1$（下）；蓝虚线从外到内（取 a_D 和 v_D）为流线：$\boldsymbol{\Psi}=-0.1$（外圈），-1，-2，-3，-4，-5（内圈）；绿实线为上升区（取 a_U 和 v_U）的流线：$\boldsymbol{\Psi}=10$（右），$\boldsymbol{\Psi}=5$，$\boldsymbol{\Psi}=1$（左）。由图可见，下沉区的绿虚线与实测有异；蓝虚线（涡流）与实测略同但 6 km 以上略异；上升区的绿实线与实测大致吻合，其径向外侧尾端约 62 km 微远于实测。

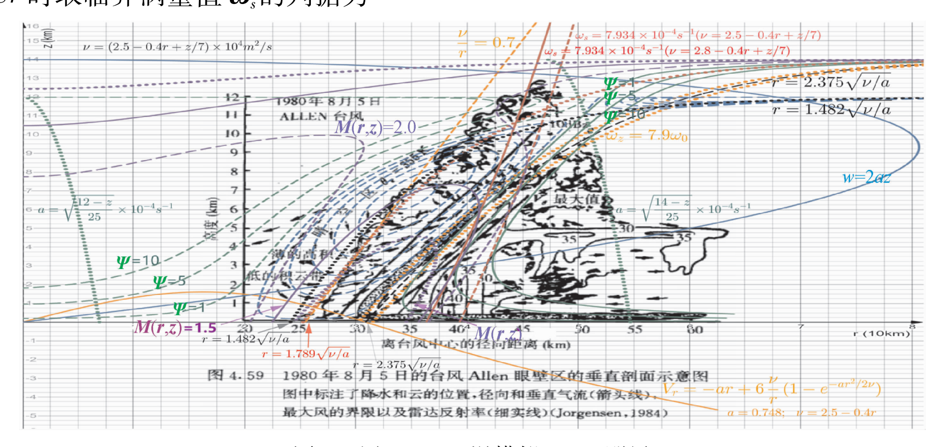


图 4　用 Sullivan 涡模拟 Allen 飓风

Fig. 4　Simulation of Hurricane Allen with Sullivan vortex

图 4 红珠线是取 a_U 和 v_U 绘出的 $r=1.789\sqrt{v/a}$ 线，它为挤压内界（等 $6.054\boldsymbol{\omega}_0$ 线与它重叠故未绘出）；黑珠线是取 a_D 和 v_D 绘出的 $r=1.482\sqrt{v/a}$ 线，它是 $\boldsymbol{V}_z=0$ 的位置；而橙虚线是取 a_D 和 v_D 的等 $v/r=0.7$ m/s 线，刚移使 $v=UR=Ur$ 故内界（平均）扰速 U 应为 0.7 m/s。

图 4 的等 $\boldsymbol{\omega}_s=7.934\times 10^{-4}\mathrm{s^{-1}}$ 线中，红实线对应 v_U，而 v_D 对应红虚线，该两线间的中层实测风场，是与绿实流线不再匹配的临界区。该区流速与中层（2.5～5 km）辐散流（平移向外的黑箭头）的矢量差，与涡流的 $\boldsymbol{V}_r$（向内）和 $\boldsymbol{V}_z$（向上）的合成速度（向内向上）定性吻合。

图 4 黑阴影斜带与 $r=2.375\sqrt{v/a}$（黑虚线，取 a_U 和 v_U）对应，并终止于等 $\boldsymbol{\omega}_s=7.934\times 10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$ 红

实线处(终止位置约为 $r=4.1, z=6.0$),而 $7.9\boldsymbol{\omega}_0$ 域(橙珠线,取 a_U 和 v_U)也在此,故有中心涡量 $1.0\boldsymbol{\omega}_0 \approx 1.0\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$,而最大涡量 $7.934\boldsymbol{\omega}_0 \approx \boldsymbol{\omega}_s = 7.934\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$。

图 4 的升速 $W=2az$(蓝实线,横轴为 W,单位 $10^{-1}\ \mathrm{ms}^{-1}$)在取 a_U(绿珠线,横轴为 a,$10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$)时,其最大值 $W_{\max}=0.807$ m/s,而在 $r=2.375\sqrt{v/a}$ 附近 $\boldsymbol{V}_z \approx 2az\times0.82$,由式(16)知此处允许的最大轴向扰速为 $2az\times0.122$,涡扰刚动使总升速大于 $(0.82+0.122)W_{\max}\approx0.76$ m/s,故阴影斜带(在 $\boldsymbol{\omega}_z \geq 7.9\boldsymbol{\omega}_0$ 的窄域)的最大升速为 1.0 m/s 量级;而近地面的径速 V_r 值(橙实线,10^0 m/s,取 $a=0.748\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$ 和 $v=1.0\times10^4\ \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$)与 1.0 m/s 相近,故实测最大径向风速与最大垂直风速的两条阴影带相对应,且近地面回波轮廓明显内偏。

图 4 的 3 条紫线是取 a_U 和 v_U 按式(27)绘出的 $M(r,z)=2.0$(紫虚),1.5(紫实),1.0(紫珠)。其中 $M(r,z)=1.5$(紫实)内吻合良好,为飓风护刚区当前范围。在近地面 $r>2.375\sqrt{v/a}$ 区,因无涡扰刚动的整轴挤压,挤压判据函数 $M(r,z)$ 不适用(其护刚区判据为 $\zeta \geq 10^2 U/L$)。

变形轴外倾后,强扰动($r\approx38$ km)竖直传播使涡的外边界不再一致位于 $r\to3.0\sqrt{v/a}$ 处,而是终止于低层的 $r\to3.0\sqrt{v/a}$ 处(图 4 约 $r=36$ km 处)及其上空。周速 $\boldsymbol{V}_\theta$ 最大值的径向理论位置为 $r=3.532\sqrt{v/a}$,故其实际位置应在 Sullivan 涡终止处,如实测的黑细实线。

5.3　平展结构:合浮强度呈 $a(x,y)$ 分布

组合 $a(x,y)$ 的形式再取 $\boldsymbol{\omega}_z=6\boldsymbol{\omega}_0$ 绘图可知有界 Sullivan 涡平展以弓状为主。下面给出壁湍尖形 Λ 涡和圆柱绕流"猫眼"的图解,此时 x、y 的单位为与 $\sqrt{v/a}$ 相对应的量级之比值。

5.3.1　尖形 Λ 涡、马蹄涡和条带

取涡动黏性 $v=1.0$,设合浮强度 $a(x,y)$ 随下式变化绘出 $x-y$ 平面的等 $\boldsymbol{\omega}_z=5.0$ 线,即

$$a(x,y)=\sqrt{x+y-xy+x^2}-(x^2+y^2)^{-0.5}\boldsymbol{V} \tag{34}$$

图 5 中左图是 $\boldsymbol{V}=-3.0$(蓝)、$\boldsymbol{V}=3.0$(红)、$\boldsymbol{V}=6.0$(绿)、$\boldsymbol{V}=12.0$(橙)时的涡斑。式中 $\boldsymbol{V}$(m/s)为辐散速率的 1/2。此形可见于壁湍,壁湍的 y^+ 轴此时对应 z 轴,壁湍的 z 轴对应 y 轴。

调整参数可知,辐散即 $V>0$ 时为尖形 Λ 涡、辐合即 $V<0$ 时为马蹄涡;若 a 的第一项增大 3 倍,窄条带变为尖形 Λ 涡、尖形 Λ 涡变为马蹄涡;若 a 减为原值 1/20,都为蝶状条带。

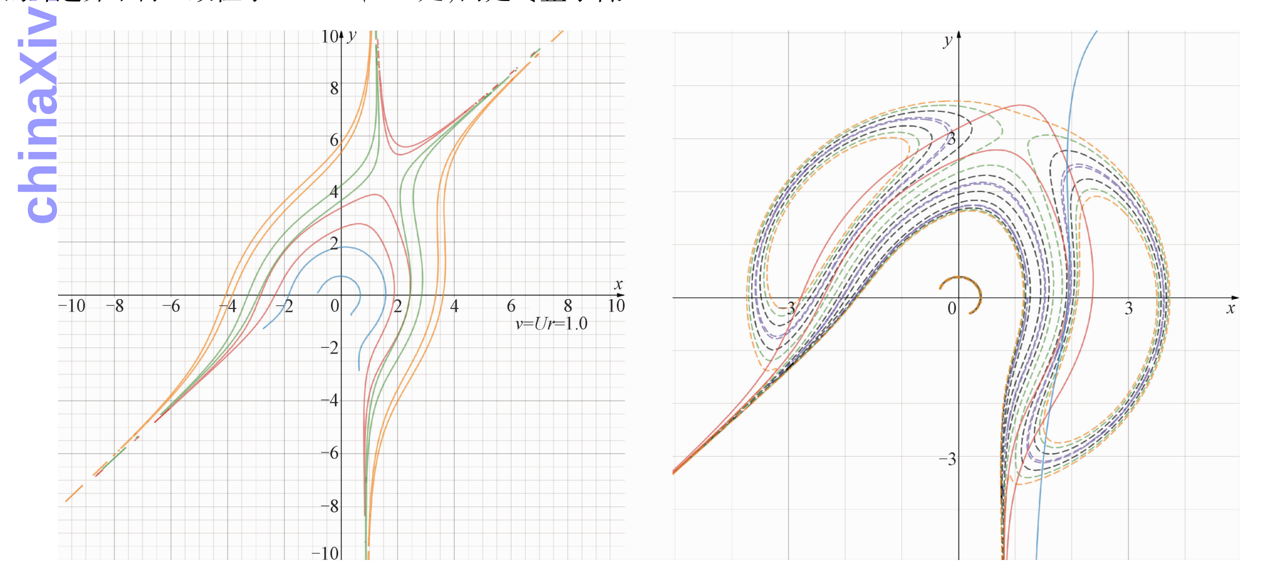


图 5　$x-y$ 平面 Sullivan 涡的 $\boldsymbol{\omega}_z=5.0$ 等值线和特征线

Fig. 5　The isoline of $\boldsymbol{\omega}_z=5.0$ and the typical line in Sullivan-vortex on x-y plane

图 5 的右图是取 $v=1$ 且 a 取式(34)的 $\boldsymbol{V}=3.0$(红)时,按式(27)绘出的 $|M(x,y)|=2.4$(橙虚),1.8(绿虚),1.0(黑虚),0.1(紫虚)以及 $\boldsymbol{\omega}_z=6.0$(红实)线和 $r=1.789\sqrt{v/a}$(蓝实)线。由图可直观看出当 $M(x,y)=1.8\sim2.4$ 时尖头受挤失稳,失稳后能维持尖形的"腿"带。

5.3.2　圆柱绕流：高涡量环绕的无涡量"猫眼"

圆柱绕流形成的 Sullivan 涡有 4 个散度中心（$N=0$），简写合浮强度 a 的表达式为

$$a(x,y)=\frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}+\frac{\boldsymbol{V}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}-\frac{k\boldsymbol{V}}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}}-\frac{k\boldsymbol{V}}{\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}\tag{35}$$

其中，速率 $\boldsymbol{V}(=U/2)$ 恒为正值。据此绘出等 $\boldsymbol{\omega}_z$ 线见图 6（旋向由 $\boldsymbol{\omega}_0$ 决定），图 6 的 U_∞ 流向正 X 轴。

图 6(a)～(b) 中，$\boldsymbol{V}=0.2$，其 5 条等 $\boldsymbol{\omega}_z$ 线为，$\boldsymbol{\omega}_z=0.01$（黑），1.0（绿），5.0（蓝），7.0（橙），7.9（红）。可看到围绕（x_0，$\pm y_0$）出现一对无涡量"猫眼"及环绕的高涡量环。

图 6(c)～(d) 中，$\boldsymbol{V}=1.0$，图中的蓝虚线为径向速度 $\boldsymbol{V}_r=0.05$，其它参数值标于图中横坐标处。可看到 $k=0.5$ 时高涡量在迎流面。

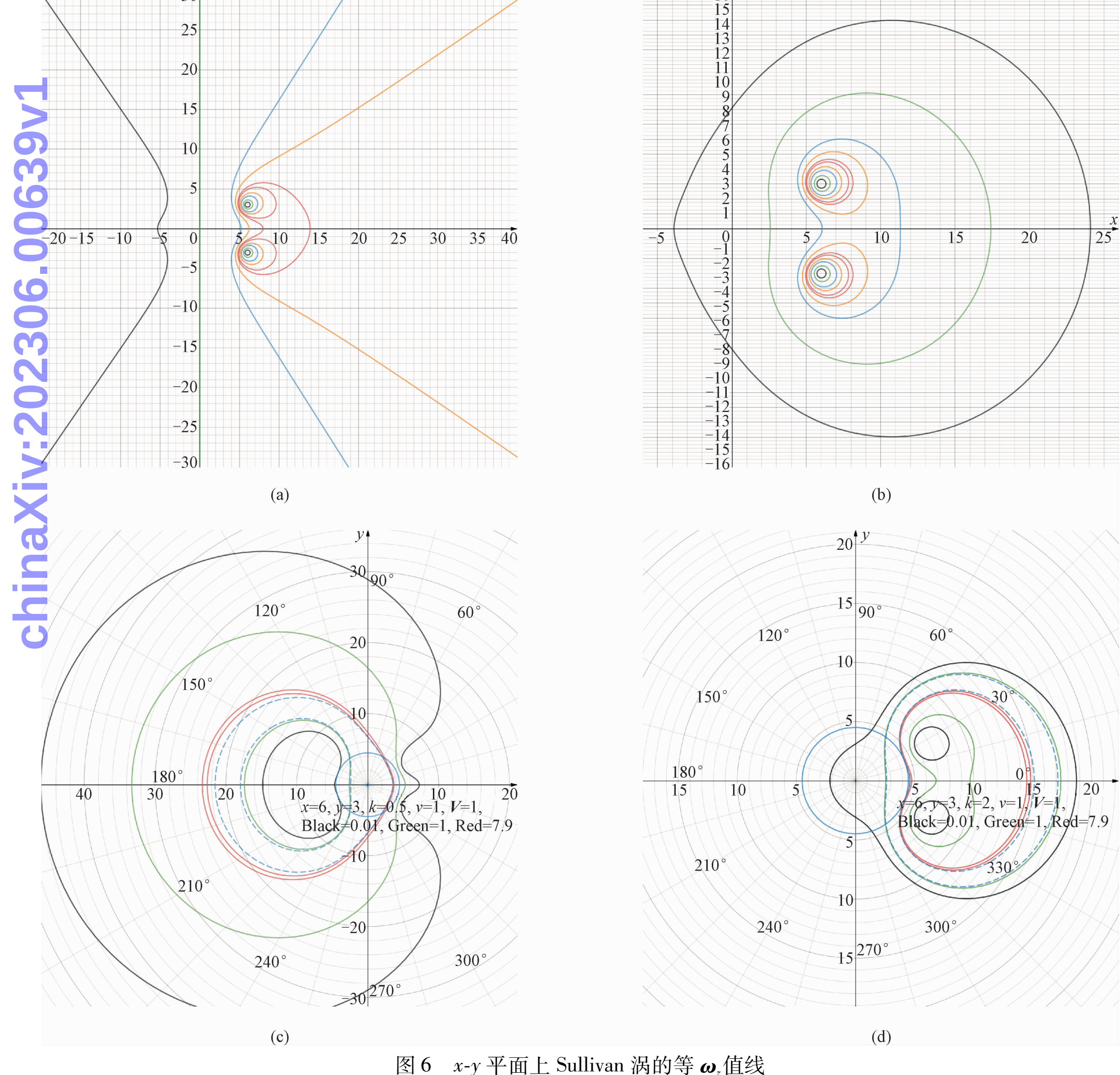


图 6　x-y 平面上 Sullivan 涡的等 $\boldsymbol{\omega}_z$ 值线

Fig. 6　The isoline of $\boldsymbol{\omega}_z$ in Sullivan-vortex on x-y plane

图 6(d)（$\boldsymbol{V}=1.0$，$k=2.0$）的 $\boldsymbol{V}_r=0$ 有 2 处，其中一处与蓝色柱面相切其 $\boldsymbol{\omega}_z\to7.934\boldsymbol{\omega}_0$（红），另一处与柱面相交其 $\boldsymbol{\omega}_z=1.0\boldsymbol{\omega}_0$（绿），该绿线在常量 a 时原是 Sullivan 涡中心 $r=0$ 的轴线，该相交位置为

分离点(分离点性质受 V、v、a、k 影响),2 处(约 2 条蓝虚线)间为径向流出。扰动使 Sullivan 涡仅存于高涡量环,实际分离点应偏离绿线、靠近相切点的红线。

类似的，二维驻点流所约定 $u=0.99U_\infty$ 的边界层厚度 $\delta\approx 2.4\sqrt{v/a}$，即来于黏性力参与平衡而形成定常 Sullivan 涡解的 2 个 $V_r=0$ 间的径宽2.375 $\sqrt{v/a}$。

5.4 当 $a<0$,或/且 $z>0$,或/且 $N^2<0$ 时的解

求解 Sullivan 涡需满足 $F=4a^2z=(D^2-N^2)z$,而 3 个因子 z、N^2、a 的正负值有 8 种组合,非虚数 a 的解为,$z>0$ 且 $N^2<0$、$z<0$ 且 $N^2>0$ 的 $\pm a$ 这 4 种情形,下文简论另 3 种情形。

5.4.1 在 $N^2<0$ 的不稳定层中向 $z>0$ 层的拉伸，且在 $a<0$ 中

此时解的形式不变,因 $a<0$ 而使 Sullivan 涡形态骤变。取 $a=-1.0$,$v=1.0$ 和 $z=0.5$ 绘出速度、涡量和流线见图 7(图中单位同图 1,仅 a 变为 $-a$,横轴 r 单位为 $\sqrt{v/|a|}$)。

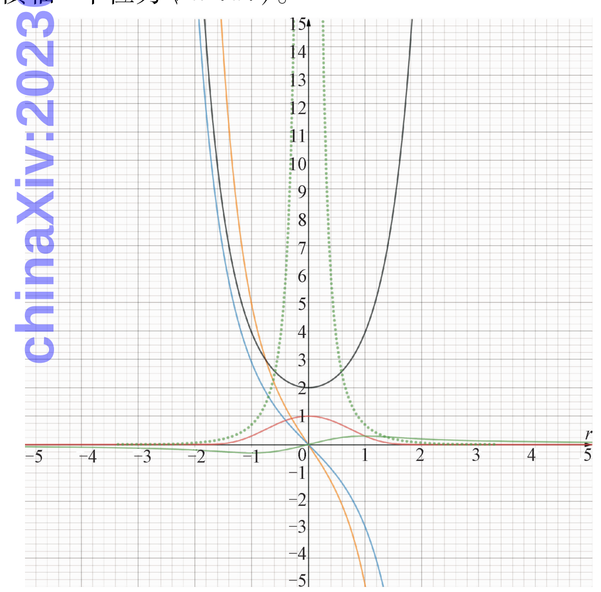


图 7 当 $a<0$ 时的 Sullivan 涡的物理量(纵轴)分布

Fig. 7 The distribution of physical quantity (longitudinal axis) in Sullivan vortex($a<0$)

图 7 显示 Sullivan 涡一致上升且外侧迅速强上升、切变$\partial V_z/\partial r$ 很大,径速 V_r也剧增但周速 V_θ微弱,而极值 $\omega_z\to 1.0\omega_0$且到 $r=1.5\sqrt{v/|a|}$处 $\omega_z\to 0$,其实景之一是过饱和时适当的干侵入所产生的水平辐散 D 使 $a>0$ 变为 $a<0$,而从 $a>0$ 变为 $a<0$ 可有 $a\to 0$ 阶段,其高涡量环径宽很大,外围的 V_θ很大(但 V_r和 V_z小),然后中心异构为反向升、降。

5.4.2 稳定层结 $N^2>0$ 中向 $z<0$ 层的拉伸

合浮力 $F=4a^2z$ 变为净重力 F_G 时 $4a^2$ 变为 $-4a^2$,若 $z<0$ 则乘积 $4a^2z$ 不变有 $F_G=4a^2|z|$,故 Sullivan 涡解式中仅涉及 z 项的两个解 V_z和 ω_θ微调 z 为$|z|$(使 $z=0$ 层向 $z<0$ 处调整),此时也分 $\pm a$ 两种情形。其中 $a<0$ 的解也易在强烈汽化时,其物理量与图 7 相同;而 $a>0$ 时解的物理量与图 1 相同,此时朝稳定层下拉(以获得向上的净浮力)可持久,但稳定层常不饱和难有$\partial/\partial\theta\to 0$,若欲有 Sullivan 涡解需周向和轴向的$\partial/\partial\theta$ 项自平衡即

$$V_\theta\partial V_\theta/\partial\theta\approx\rho^{-1}\partial P/\partial\theta+vr^{-1}\partial^2V_\theta/\partial\theta^2+2vr^{-1}\partial V_r/\partial\theta \tag{36}$$

$$V_\theta\partial V_z/\partial\theta\approx vr^{-1}\partial^2V_z/\partial\theta^2 \tag{37}$$

使式(36)成立的一般途径是 ρ^{-1}和 vr^{-1}足够小且 V_θ适度大,常是增大周速 V_θ,比如 V_θ增大 2 个量级可在$\partial V_\theta/\partial\theta$ 为一阶小量时仍有$\partial P/\partial\theta\neq 0$。此时因 vr^{-1}相对 V_θ为小量,故$\partial V_\theta/\partial\theta$ 相对$\partial V_r/\partial\theta$ 为小量;又因涡扰刚动使轴速扰动的$\partial V_z'/\partial z\to 0$,故连续性方程可取一处特解:$|\partial V_\theta/\partial\theta\approx\partial(rV_r)/\partial r\approx\partial(rV_z)/\partial z=rV_z/z\approx 0|$,它在 $r=1.482\sqrt{v/a}$的$\partial(rV_r)/\partial r\approx 0$ 且 $V_z\approx 0$ 附近窄域。

若式(36)不成立,便需周向方程中"$\partial/\partial\theta$ 项之差值"相比"其它项之差值"为相对小量。高 ω_z值既可使 V_θ较大,也易使"其它项之差值"即 $\omega_z(V_r-v\,\partial\ln\omega_z/\partial r)$较大(式 12),且允许$\partial P/\partial\theta$、$\partial V_r/\partial\theta$ 及扰速 U 都较大,故高 ω_0时便仅需$\partial V_\theta/\partial\theta$ 为适度小量。由式(26)知在 $r=1.482\sqrt{v/a}$的 $V_z=0$ 附近 $M(r)$较大,难承受挤压易有水成物拖曳,ω_0较大时因有"小量$\partial V_\theta/\partial\theta$"的更宽松约束将率先拉伸出龙卷,该处是大气风暴龙卷的经典所在(图例可见文献[9] P128 图 5.4.4 及文献[10] P136 图 6.7 或文献[8])。

式(37)因其右侧易为相对小量而难成立,故轴向需"$\partial/\partial\theta$ 项之差值"相比"其它项之差值"为相对小量。因 a 增大两个量级 V_θ相应减小一个量级,故使 $V_\theta\partial V_z/\partial\theta$ 为相对小量可取较大的 a 值(故龙卷的 ω_z和 a 较大而 V_θ适中)。常始于 $a\sim 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$的超单若有较强辐合或适度干侵入可使 a 达 $10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$量级,再经拉伸也达大气层结 $N\sim a$ 的均值 $10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$量级,故朝稳定层拉伸时超单强回波常为百米量级。超单较明显的回波常在 1.48 ~2.61 $\sqrt{v/a}$间径宽约 1.13 $\sqrt{v/a}$的

升变环内,而强回波在 1.7 ~ 2.375 $\sqrt{v/a}$间径宽为 0.675 $\sqrt{v/a}$的高涡量环内,其实例(300 m)可见文献[10]P140 图6.14。但当 $a \sim 10^{-2}\mathrm{s}^{-1}$时,不可压约束需涡内的$\partial p/\partial z \sim 4a^2 z$ 与环境的$\partial P/\partial z \sim N^2 z$ 匹配,故还需$\partial a/\partial z$ 缓变。

5.5 旋转对流的最后阶段:挤压出的龙卷

挤压时位置 $M(r,z)=0$ 常是旋体的最后阶段或新源地,下面(比对图 3)恒取 $v=1$,按式(27)绘出 $a=\sqrt{25/(12-z)}$对应的 $r-z$ 平面的等 $M(r,z)$线,并嵌入等 $\boldsymbol{\omega}_z$线,如图 8 所示。

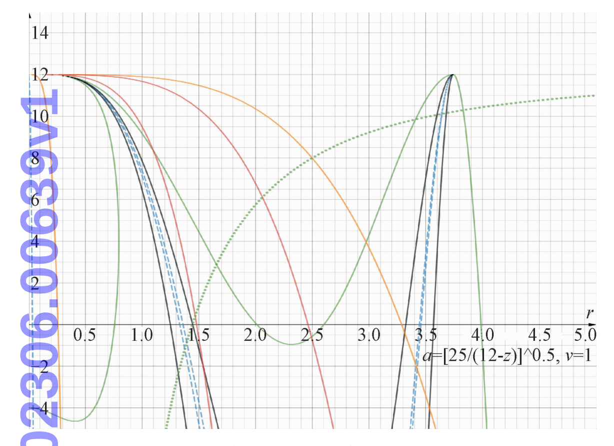


图 8 挤压扰动后旋转对流的高涡量区和低 $M(r,z)$ 区

Fig. 8 The high vorticity and low $M(r,z)$ region of the rotating convection with extrusion disturbance

图 8 红线为等 $\boldsymbol{\omega}_z=6.0$ 线,橘线为等 $\boldsymbol{\omega}_z=1.1$ 线(两线间 $\boldsymbol{\omega}_z$强);黑实线是 $M(r,z)=1.0$ 线,蓝虚是 $M(r,z)=0.2$ 线,绿实是 $M(r,z)=5.0$ 线;绿珠线是 $a(z)$线(此时 a 为横坐标)。

位置 $M(r,z)=0$ 在 $z=0$ 高度有一处位于 $r=13.47$常即 $r\approx1.618\sqrt{v/a}$处(邻近 $\boldsymbol{\omega}_z=6.0$),然后随 z 逐渐斜升,斜率与图 3 黑实线 $\boldsymbol{V}_z=0$ 同,故挤压时残存对流在穹隆处;因拉伸常应相伴故近地面龙卷常在 1.482 $\sqrt{v/a}$至 1.618 $\sqrt{v/a}$间、$\boldsymbol{V}_z=0$ 外的上升气流侧;而另一低 $M(r,z)$值区远离高涡量环故难挤出双龙卷,当 v 有轴向波动时也可挤出双龙卷且易相向。

6 电磁波——Taylor-Proudman 定理下旋体的一种扰动态

在流场参数连续的无穷小区域,质量守恒时从旋体动量方程可得 Navier-Stokes 方程,再由 Taylor-Proudman 定理,若扰速远大于转速涡扰刚动可使 $u_i\approx\mathrm{Const}$。在此局域若压力和彻体力为相对小量,则膨胀黏性系数 $\mu'=0$(stokes 第 4 假设)的匀黏性动量方程可写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}\approx\frac{1}{u_i}\cdot\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j}=$$
$$\frac{1}{u_i}\left(v\,\nabla^2(\rho u_i)+\frac{v}{3}\frac{\partial[\nabla\cdot(\rho u_i)]}{\partial x_j}\right)=$$
$$v\,\nabla^2\rho+\frac{v}{3}\frac{\partial(\nabla\cdot\rho)}{\partial x_j} \tag{38}$$

式中,τ_{ji}为偏应力张量,此时密度 ρ 为变量故改写为 $\hat{\rho}$。当$\partial(\rho u_j)/\partial x_j$为相对小量时有

$$\partial\hat{\rho}/\partial t\approx\partial\hat{\rho}/\partial t+\partial(\hat{\rho}u_j)/\partial x_j\approx v\,\nabla^2\hat{\rho} \tag{39}$$

刚移使式(39)的运动黏性也取为 $v=UR$ 形式,有波动解时扰动二阶分布尺度 R 为波长 λ 即 $v=U\lambda$。设密度波的周期 δt、波速 c 即 $\lambda=c\delta t$,则 $v=Uc\delta t=c^2\delta t$,故有

$$\partial\hat{\rho}/\partial t=c^2\delta t\,\nabla^2\hat{\rho} \tag{40}$$

然后设变量 $\boldsymbol{E}=i\,\hat{\rho}$代入($i$ 为虚数单位),并定义 $\boldsymbol{B}\equiv-\delta t\,\nabla\wedge\boldsymbol{E}$ 而取式(40)和 $\boldsymbol{B}$ 的时间微商。在 $\delta t\to\partial t\to0$ 且$\partial\hat{\rho}/\partial t<\infty$ 时(常即横波、各向同性以及匀黏性 $v\to$匀变黏性),可得到电磁波 Maxwell 方程组的 2 个主控方程,$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为电矢量和磁矢量。

极速传播时,远大于 c/λ 的极强涡量是维持局域匀速的必要保障(旋轴可随意取向),故旋体应足够小以使转速可被波速忽略,而压力项和彻体力项为相对小量的约束也要求旋体足够小,因而该旋体应是在匀质中恒速传播以自扰的微观粒子,可称之为涡粒。

因 $U/L\sim1/\delta t$,可知判据$\zeta\gg U/L$ 与能变$\delta\boldsymbol{E}\sim$时变 δt 的不确定度关系 $\delta t\delta\boldsymbol{E}\geq\hbar/2$ 同义($\hbar$ 为约化 Planck 常数),$\zeta\gg U/L$ 是不确定度原理 $\delta x\delta p\geq\hbar/2$ 的动力学来源。

若 $a<0$(图 7)在 $r=5.3\sqrt{v/|a|}$有 10^6、$r=6\sqrt{v/|a|}$有 10^8量级的轴速 $\boldsymbol{V}_z$或径速 $\boldsymbol{V}_r$(单位见图 1),而约束 $\zeta\gg U/L$ 所需极强 $\boldsymbol{\omega}$ 在转速 $\boldsymbol{V}_\theta\sim10^0\,\mathrm{m/s}$ 时需尺度极小,故光子或电子可在常态生成。此时涡粒的强自转涡量使其受扰能整轴刚移而产生黏性 v,而"公转"的 Sullivan 涡量 $\boldsymbol{\omega}_z$远远小于 $10^{-300}\boldsymbol{\omega}_0$严格为 0,其为绕宇宙的"直线旋转",而扰动下自转本身所呈高涡量环结构即可为超弦。故图 4 终止位置过低的临界高度($z=6.0$)使飓风甚少闪电。

7 结　语

旋体涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 远大于扰速 $\boldsymbol{V}$ 的分布尺度 U/L 时(L 为一阶尺度)，可满足 Taylor-Proudman 定理而有 $\partial \boldsymbol{V}/\partial z \to 0$，旋体对扰动做整轴响应而产生强涡动黏性 v 使黏性力参与平衡。因地转可被忽略或分离，而净浮力和辐合辐散驱使的竖直轴向满足 $\boldsymbol{F} = 4a^2 z$ 形式，故轴对称时可形成定常 Sullivan 涡解，它是 $\boldsymbol{\omega}_z \geqslant 10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$ 的强涡量旋体在湍流中的重要形态。

Sullivan 涡具有最大轴向涡量 $\boldsymbol{\omega}_z = 7.934\boldsymbol{\omega}_0$ 及径向 3 个特征位置：轴速 $\boldsymbol{V}_z = 0$ 的 $1.482\sqrt{v/|a|}$、径速 $\boldsymbol{V}_r = 0$ 的 $2.375\sqrt{v/|a|}$ 和周速 $\boldsymbol{V}_\theta$ 最大值的 $3.532\sqrt{v/|a|}$，并因满足定理所需约束而呈高涡量环和护刚区形态，在较强挤压扰动中具有临界位置 $M(r,z) = 0$ 和常约 $6\boldsymbol{\omega}_0$ 的临界涡量。当合浮强度 a 随静力稳定度 N 或水平散度 D 呈三维 $a(x,y,z)$ 分布时，产生相应的超单、飓风、尖形 Λ 涡、“猫眼”、龙卷等结构。

大气中 Sullivan 涡的螺旋状水平流入有利水汽和能量聚集，相邻的 $\boldsymbol{V}_z$、$\boldsymbol{V}_r$ 异向有利饱和水滴凝结增长，$\boldsymbol{V}_z = 0$ 处易因挤压失去刚性而明显降水，逐渐发展后 $\partial a/\partial z \to 0$ 能使降水集中，整轴刚移可在 $a \to 0$ 时仍强上升。但形成黏性涡解需满足定理约束常即 $\zeta \gg U/L$ 以激发强涡动黏性，故旋体涡量 $\boldsymbol{\omega}$ 的生成和并合、扰速 U 的强度和变化、稳定度 N 和水平散度 D 的大小分布，应是大气局地强对流的预报焦点且 $\boldsymbol{\omega}$ 常是主因。

Taylor-Proudman 定理可使黏性突变，包括 $\zeta \gg U/L$ 在内的约束条件限定了湍流形态，有界的 Sullivan 涡解是其一个简单表现，它的另一简单表现是呈电磁波而自扰的微观涡粒。

参考文献：

[1] 邹高万，贺征，顾璇. 粘性流体力学[M]. 北京：国防工业出版社，2013：122-123，170，178，314，318，347-352，397，408.

[2] 童秉纲，尹协远，朱克勤. 涡运动理论[M]. 2 版. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009：1-2，16，23-24，143，192-198.

[3] 庄礼贤，尹协远，马晖扬. 流体力学[M]. 2 版. 合肥：中国科学技术大学出版社，2009：70，100-104，390，398-400，408，418，437.

[4] 刘式达，刘式适. 大气涡旋动力学[M]. 北京：气象出版社，2011：193-195，184-189.

[5] 朱克勤，许春晓. 粘性流体力学[M]. 北京：高等教育出版社，2009：161，227.

[6] 张兆顺，崔桂香，许春晓，等. 湍流理论与模拟[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2017：1-2，69，97-115，133，137，246-253，264-265.

[7] 刘式适，刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 2 版. 北京：北京大学出版社，2012：261.

[8] 丁一汇，罗亚丽. 高等天气学讲座单元四：对流和降水天气系统 第十讲 对流系统[EB/OL]. https://www.doc88.com/p-49899833914436.html，2022-03-09.

[9] 陆汉城，杨国祥. 中尺度天气原理和预报[M]. 2 版. 北京：气象出版社，2004：55-59，126，128，184.

[10] 俞小鼎，姚秀萍，熊廷南，等. 多普勒天气雷达原理与业务应用[M]. 北京：气象出版社，2007：136，140.

[11] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2008：112-115.

（编辑　史淑英）